

# Une méthode asymptotique pour tester la validité du modèle d'équilibre d'actifs financiers (MEDAF) avec pour exemple la bourse de Paris

## An asymptotic method to test the validity of the capital asset pricing model (CAPM) with the Paris Stock Exchange as an example

Emmanuel Apel

Volume 57, numéro 2, avril-juin 1981

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/600972ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/600972ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)

1710-3991 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

### Citer cet article

Apel, E. (1981). Une méthode asymptotique pour tester la validité du modèle d'équilibre d'actifs financiers (MEDAF) avec pour exemple la bourse de Paris. *L'Actualité économique*, 57(2), 225–243. <https://doi.org/10.7202/600972ar>

### Résumé de l'article

One of the problems in testing the validity of the two-parameter CAPM is the determination of an *efficient* proxy market portfolio to represent the true market portfolio. We test the mean-variance efficiency of a *pre-specified* market portfolio by using a method proposed by Roll (1976) for testing the linear relation between the rate of return of an asset and its beta, and hence the mean-variance efficiency of a proxy market portfolio. This procedure exploits the asymptotic exact linearity condition of the rate of return and beta by measuring the rate of decrease of cross-sectional residual variance with respect to increasing time-series sample size. The technique is applied to samples of companies on the Paris Stock Exchange for the period 1969-1978: 144 companies and twenty-nine different time series. The results indicate that although the sum of the squared residuals of a CAPM-type regression declines as the number of time observations increases, the sum of the squared residuals does not approach zero as the temporal sample size increases, as would be required for the market proxy of our pre-specified sample to be efficient.

# UNE MÉTHODE ASYMPTOTIQUE POUR TESTER LA VALIDITÉ DU MODÈLE D'ÉQUILIBRE D'ACTIFS FINANCIERS (MEDAF) AVEC POUR EXEMPLE LA BOURSE DE PARIS\*

## 1. INTRODUCTION

L'un des problèmes quand on teste la validation du modèle d'équilibre d'actifs financiers (MEDAF) est de sélectionner un portefeuille de marché approximatif et efficient pour représenter le véritable portefeuille de marché. Il est clair en effet que, ne connaissant pas le portefeuille de marché véritable, nous devons toujours nous baser, pour tester le MEDAF, sur un portefeuille de marché approximatif. C'est ce qu'ont fait de nombreux chercheurs comme Fama et MacBeth (1973), Black, Jensen et Scholes (1972), Miller et Scholes (1972). Ils ont fait ressortir certaines implications qui devraient tenir si le MEDAF est bien le modèle approprié pour expliquer le rapport d'équilibre entre le taux de rendement espéré d'un actif et le taux de rendement espéré du marché. Au nombre de ces implications, notons par exemple la relation linéaire entre le taux de rendement espéré d'un actif et son coefficient bêta, où ce dernier est calculé sur la base d'un portefeuille de marché approximatif. Cependant, comme le fait remarquer Roll (1977) et comme nous allons le voir ci-après, si cette propriété linéaire ne prouve pas la validité du MEDAF, l'absence de linéarité ne la réfute pas non plus.

S'il est vrai que si, et seulement si, le portefeuille de marché est efficient en termes de l'espérance-variance, la relation linéaire entre le rendement espéré d'un actif et son coefficient bêta tiendra, il est également vrai que, dans tout échantillon d'observations sur les rendements individuels, les bêtas calculés entre le portefeuille de marché composé de cet échantillon et les actifs individuels auront une relation linéaire exacte avec le taux de rendement moyen de chaque titre individuel de l'échantillon<sup>1</sup>. Ainsi, si l'on calcule les coefficients bêta en utilisant un tel portefeuille, ils satisferont exactement à la relation linéaire. Supposons, par exemple, qu'il existe 1000 actions mais que seules 500 sont

\* L'auteur remercie le Centre d'Enseignement Supérieur des Affaires (Jouy-en-Josas, France) pour sa généreuse allocation de temps gratuit d'ordinateur.

1. Si l'on suppose (1) que les investisseurs considèrent comme optimaux les portefeuilles qui sont efficients en termes d'espérance et de variance de la rentabilité des actions et (2) que tous les investisseurs ont les mêmes anticipations, les mathématiques de l'analyse du portefeuille aboutissent à une relation linéaire pondérée entre le taux de rendement d'un actif  $j$  et le taux de rendement de deux portefeuilles orthogonaux  $z^*$  et  $m$  (voir Roll, 1976).

utilisées dans l'échantillon. Nous obtenons des portefeuilles bien diversifiés des 500 actions qui semblent être des approximations raisonnables du vrai portefeuille de marché, et dont les rendements observés auront, pour une coupe transversale, une relation exactement linéaire avec les coefficients bêta observés. Cependant, même si le portefeuille approximatif s'avère inefficent, ce seul fait ne suffit pas à prouver l'efficience ou l'inefficience du vrai portefeuille de marché.

Selon ces observations, l'identification du portefeuille de marché pose un problème pour la vérification empirique du MEDAF à deux paramètres. Que faire? Nous pouvons tester l'efficience moyenne-variance d'un portefeuille de marché pré-spécifié. Comment? On peut être tenté d'avoir recours à des méthodes déjà établies dans la littérature (Fama et MacBeth, 1973, par exemple), soit de tester la linéarité de la relation rendement/bêta pour des données en coupe transversale puisque, si le portefeuille de marché approximatif est efficient en termes de moyenne-variance, il existe une relation linéaire entre le taux de rendement et le bêta. Toutefois, la méthode largement utilisée de «regroupement» de portefeuille de sorte à obtenir des estimations précises des paramètres n'est pas très utile car les déviations d'un titre individuel par rapport à la linéarité peuvent s'annuler lors de la formation des portefeuilles.

La méthode proposée par Roll (1976) de tester la relation de linéarité et donc l'efficience moyenne-variance d'un portefeuille de marché approximatif exploite la linéarité exacte et asymptotique en mesurant le taux de diminution de la variance résiduelle d'une coupe transversale tout en élargissant la taille chronologique de l'échantillon.

Nous tenterons, en deuxième partie, de résumer brièvement les techniques utilisées par les auteurs de la procédure de «regroupement» à ce qui est en réalité une tentative de leur part de tester l'efficience du marché approximatif<sup>2</sup>. Dans la troisième partie, nous exposerons la

2. Les méthodes employées par des auteurs comme Fama et MacBeth (1973), Black, Jensen et Scholes (1972), et Blume (1971) sont à vrai dire des tests de l'efficience du marché approximatif dans le cadre du MEDAF. Tous les autres tests, par exemple les 3 propositions de Fama et MacBeth (1973, p. 610), à savoir :

(1) que dans tout portefeuille efficient  $m$  la relation entre la rentabilité espérée d'une action et son risque est linéaire,

(2) que  $\beta_j$  est une mesure complète du risque de l'action  $j$  dans le portefeuille efficient  $m$ , soit qu'aucune autre mesure du risque de l'actif  $j$  n'apparaît dans l'équation

$$E(\tilde{r}_j) = E(\tilde{r}_0) + \beta_j[E(\tilde{r}_m) - E(\tilde{r}_0)],$$

(3) que sur un marché d'investisseurs risquophobes, un risque plus grand devrait être associé à une rentabilité espérée plus élevée, c'est-à-dire,  $E(\tilde{r}_m) - E(\tilde{r}_0) > 0$ , ne sont pas des tests indépendants, mais sont des implications de l'efficience du portefeuille de marché approximatif. Si l'on sait que  $m$  est efficient et que le MEDAF est le modèle approprié pour le test, ces 3 propositions ne peuvent pas être testées indépendamment. Si  $m$  est efficient, la proposition (1) est vraie, et les propositions (2) et (3) suivent automatiquement. En d'autres termes, tester la proposition (1) revient en effet à tester l'efficience de portefeuille de marché ou du portefeuille approximatif.

technique employée par Roll pour tester l'efficacité du marché approximatif et nous l'appliquerons dans la quatrième partie à des échantillons de sociétés cotées à la Bourse de Paris durant la période de 1969 à 1978. Enfin, dans la dernière partie de cette étude, nous analyserons les résultats des tests et exposerons nos conclusions.

## 2. MÉTHODES ANTÉRIEUREMENT UTILISÉES POUR TESTER LA VALIDATION DU MEDAF

Utilisant une procédure sophistiquée de «regroupement», les auteurs mentionnés dans la note 2 estiment les coefficients bêta pour chaque société, puis testent la linéarité entre les taux de rendement d'un groupe de sociétés et son coefficient bêta correspondant. Pour plus de clarté, nous résumerons leur méthode comme suit :

(1) Partant d'un large échantillon de sociétés et des 4 premières années, par exemple, d'une longue série chronologique de données mensuelles, on estime le coefficient  $\beta_j$  de chaque société à partir de la régression du MEDAF en prenant comme variable indépendante un taux de rendement de marché approximatif, soit :

$$\tilde{r}_{jt} = (1 - \beta_j)\tilde{r}_{zt} + \beta_j\tilde{r}_{mt} + \tilde{\epsilon}_{jt}^3$$

où :

$\tilde{r}_{jt}$  = le taux de rendement de l'action  $j$  de la période  $(t - 1)$  à la période  $t$  ;

$\tilde{r}_{zt}$  = le rendement du portefeuille à bêta zéro — soit le portefeuille dont la covariance avec les rendements du portefeuille de marché  $r_{mt}$  est égale à zéro <sup>4</sup> ;

$\tilde{r}_{mt}$  = le taux de rendement du portefeuille de marché ;

$t$  = fait référence à chaque mois à l'intérieur des quatres années en question.

On constitue ensuite vingt portefeuilles (par exemple) sur la base du classement des coefficients  $\hat{\beta}_j$ .

(2) À l'aide des données mensuelles des cinq années suivantes on recalcule les coefficients  $\hat{\beta}_j$  pour lesquels on établit une moyenne

3. D'après les mathématiques de l'analyse du portefeuille, on peut démontrer (Merton, 1972) que pour tout actif arbitraire, ou portefeuille  $j$ , le rendement moyen de l'échantillon est égal à la moyenne pondérée de  $r_z$  et  $r_m$ , où  $z$  représente le seul portefeuille dont la corrélation avec le portefeuille de marché est zéro et qui se situe dans la partie à pente négative de la frontière efficiente de l'échantillon.

4. Étant donné que  $\tilde{r}_{zt}$  n'est pas empiriquement disponible, on estime en général l'équation en substituant une constante  $\alpha_j$  pour  $(1 - \beta_j)\tilde{r}_{zt}$ , ce qui implique que l'on remplace  $E(\tilde{r}_z)$  par  $\tilde{r}_{zt}$  (voir Black, 1972).

transversale à partir des titres divers compris dans chaque portefeuille [comme défini en (1)] pour obtenir vingt premiers  $\hat{\beta}_p$  — un pour chaque portefeuille.

(3) On calcule ensuite les rendements mensuels des 20 portefeuilles composés de titres individuels de pondération égale. Pour chaque mois  $t$  de cette période de cinq ans on calcule la régression de coupe transversale suivante (où  $p$  désigne un portefeuille de sociétés) :

$$\tilde{r}_{pt} = \gamma_{0t} + \gamma_{1t}\beta_{pt} + \gamma_{2t}\hat{\beta}_{pt}^2 + \gamma_{3t}\hat{\sigma}_{\epsilon pt} + \tilde{\eta}_{pt} \quad (1)$$

où :

$\hat{\sigma}_{\epsilon pt}$  = la moyenne de la variance résiduelle du  $\epsilon_{jt}$  des sociétés incluses dans le portefeuille  $p$

$p = 1, 2, \dots, 20$ .

(4) On recommence les mêmes opérations (1), (2) et (3) pour la période de temps suivante.

Si les coefficients  $\hat{\gamma}_{2t}$  et  $\hat{\gamma}_{3t}$  pour toutes les périodes  $t$  ne sont pas différents de zéro, on conclut à la validation du MEDAF à deux facteurs ou, selon le raisonnement exposé dans la note 2, on conclut à l'efficacité du marché approximatif ( $\tilde{r}_{mt}$ ).

L'utilisation de cette procédure sophistiquée de «regroupement» en portefeuilles a pour but d'éliminer le problème de «l'erreur de variable» lors de l'estimation de chaque coefficient bêta qui biaiserait les coefficients estimés de la relation (1), soit les coefficients estimés  $\hat{\gamma}_{1t}$ ,  $\hat{\gamma}_{2t}$ ,  $\hat{\gamma}_{3t}$ .

Toutefois, ce test de l'efficacité du marché approximatif n'est pas robuste en ce sens que nous ne disposons d'aucun moyen de déterminer la façon dont la relation doit s'écarter de la linéarité en cas de marché inefficace. Par exemple, il n'y a aucune raison de s'attendre à ce que les rendements moyens soient reliés, en coupe transversale, aux bêtas carrés ou aux variances résiduelles de chaque actif. Ainsi, pour une coupe transversale, la dispersion des rendements et des bêtas peut sembler se répartir au hasard autour d'une ligne droite et la déviation de ci et de là de la ligne peut être imputée à la variation de l'échantillonnage quand, en fait, elle ne disparaîtrait pas à mesure que la taille de l'échantillon s'élargirait à l'infini parce qu'elle est due à l'inefficacité du marché approximatif. En d'autres termes, le problème n'est pas de trouver une méthode permettant d'établir des bêtas libres d'erreur dans une équation du type (1), mais plutôt de vérifier si le terme d'erreur dans la relation entre les taux de rendement de l'actif et le bêta diminue à mesure que la taille de l'échantillon temporel augmente. Une fois le problème posé de cette façon, la présence de biais dans l'estimation des bêtas ne pose plus de difficultés dans l'analyse. Même

si les bêtas estimés sont biaisés, le terme d'erreur dans la relation entre les taux de rendement et les bêtas devrait, si le portefeuille marché approximatif est efficient, diminuer à mesure que la taille de l'échantillon temporel augmente. Ceci étant le cas, nous utiliserons la méthode proposée par Roll (1976) pour tester l'efficience de la moyenne-variance du marché approximatif.

### 3. UNE MÉTHODE PROPOSÉE PAR ROLL POUR TESTER L'EFFICIENCE DU MARCHÉ APPROXIMATIF

Partant d'un échantillon de société (actifs) préspecifié, le véritable vecteur bêta est une fonction exactement linéaire du véritable vecteur du rendement moyen si le marché est ex ante efficient ; c'est-à-dire :

$$E(\hat{R}) = \gamma_0 + \gamma_1 E(\hat{V}X_m) \quad (2)$$

où :

$\hat{R}$  = le vecteur du rendement moyen de l'échantillon ;

$\hat{V}$  = la matrice ( $N \times N$ ) de covariance de chaque titre dans l'échantillon ;

$X_m$  = le vecteur ( $N \times 1$ ) de la pondération de chaque actif dans le portefeuille marché approximatif ;

$E(.)$  = les valeurs correspondantes de la population ;

$\gamma_0$  =  $E(\hat{R}_z)$  et  $\gamma_1$  =  $E(\hat{R}_m - \hat{R}_z)$  si le portefeuille est efficient ;

$z$  = le portefeuille de marché orthogonal efficient de  $m$ .

Le vrai vecteur bêta est défini comme :  $\beta = E(\hat{V}X_m)/\sigma_m^2$  où  $\sigma_m^2$  désigne la vraie variance du marché approximatif soit, dans ce cas,  $E(\hat{V}X_m) \equiv \beta\sigma_m^2$ .

L'inconvénient d'employer bêta au lieu de  $\hat{V}X_m$  est que la variation de l'échantillon de la variance  $\hat{\sigma}_m^2$  du marché approximatif peut donner lieu à une erreur de mesure. Puisque le paramètre  $\sigma_m^2$  n'est pas essentiel pour ce qui est de la propriété linéaire, nous pouvons l'éliminer de l'expression bêta et l'incorporer dans  $\gamma_1$ , ce qui nous donne :

$\gamma_1 + E\{(\hat{R}_m - \hat{R}_z)/\sigma_m^2\}$ . Puisqu'il n'existe pas d'hypothèse bien établie relative aux valeurs quantitatives de  $\gamma_1$  ou, à vrai dire, de  $\gamma_0$ , si ce n'est que la valeur de  $\gamma_1$  est positive, nous pouvons sans inconvénient éliminer le terme  $\sigma_m^2$  de l'expression bêta et donc calculer  $\hat{V}X_m$  au lieu de  $\hat{V}X_m/\sigma_m^2$ .

Nous avons donc une équation opérationnelle et équivalente à l'équation (2), à savoir :

$$\dot{R} = \gamma_0 + \gamma_1(\dot{V}X_m) + \epsilon_R - \gamma_1\epsilon_V \quad (3)$$

et où :

$$\epsilon_R = \dot{R} - E(\dot{R}), \text{ et } \epsilon_V = \dot{V}X_m - E(\dot{V}X_m)$$

représentent les vecteurs de l'erreur d'estimation contenue dans  $\dot{R}$  et dans  $\dot{V}X_m$ , respectivement. Étant donné que la bonne variable explicative à inclure dans l'équation (3) aurait dû être  $E(\dot{V}X_m)$  et non  $\dot{V}X_m$ , nous nous trouvons effectivement devant un problème d'erreur dans les variables. Cependant, les valeurs numériques de  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  n'ayant aucune importance en ce qui concerne l'hypothèse soutenue de l'efficacité du marché approximatif, ce problème ne doit pas nous gêner pour tester cette dernière. Nous cherchons seulement à déterminer si le vecteur  $\epsilon_R - \gamma_1\epsilon_V$  se rapproche du vecteur zéro à mesure que la taille de l'échantillon temporel augmente, autrement dit, si la linéarité de l'équation (3) tend à être exacte à mesure que la taille de l'échantillon temporel augmente. Ceci signifie que la variance résiduelle d'une régression à coupe transversale doit approcher zéro à mesure que le nombre d'observations chronologiques augmente.

Nous procédons pour cela de la façon suivante : à partir d'un échantillon total de 144 sociétés<sup>5</sup> cotées à la Bourse de Paris, et de 494 observations chronologiques pour chacune de ces sociétés, (i) nous calculons le taux de rendement moyen ( $\dot{R}$ ) de chaque titre, ainsi que sa variance-covariance pondérée ( $\dot{V}X_m$ ), à l'aide des 4 premières observations chronologiques de chaque société ; (ii) nous estimons une régression à coupe transversale (3) sur la base des 144 sociétés. On répète les opérations (i) et (ii) pour les cinq observations chronologiques suivantes, soit de la 4<sup>e</sup> à la 8<sup>e</sup>, puis pour les observations chronologiques 8 à 13, et ainsi de suite, toujours à partir de ces mêmes 144 sociétés. Pour chaque sous-échantillon de séries chronologiques qui ne se chevauchent pas, on calcule l'erreur du vecteur de variance de l'équation (3) ( $\epsilon_R - \gamma_1\epsilon_V$ ) correspondant à chacune des tailles des échantillons temporels. Si l'asymptote estimé se trouve à un niveau significativement différent de zéro, l'hypothèse de l'efficacité du marché approximatif doit être rejetée.

Pour mieux comprendre cette procédure, prenons pour exemple une série temporelle à quatre périodes (soit 3 périodes d'observation des taux de rendement) pour un échantillon de 144 sociétés.

5. Afin de démontrer la robustesse de la relation entre la somme des carrés des résidus et la taille de l'échantillon temporel, nous procéderons également à l'analyse décrite ci-après pour des sous-échantillons de ces 144 sociétés, c'est-à-dire en laissant de côté les 44 premières sociétés et les 44 dernières. Les résultats obtenus sont décrits dans la 5<sup>e</sup> partie de cette étude.

Sous forme matricielle, l'équation de la régression (3) devient :

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \bar{r}_{144} \end{bmatrix} = \gamma_0 + \gamma_1 \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{12} \dots \dots \dots \hat{\sigma}_{1 \ 144} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\sigma}_{144,1} \hat{\sigma}_{144,2} \dots \dots \dots \hat{\sigma}_{144,144} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_{144} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ e_{144} \end{bmatrix}$$

où

$\bar{r}_1 = (r_{1t} + r_{1, \ t+1} + r_{1, \ t+2})/3$   $t$  désigne la période de temps initiale ;

$\bar{r}_2 = (r_{2t} + r_{2, \ t+1} + r_{2, \ t+2})/3$  le premier indice inférieur désigne la société

.

$$\hat{\sigma}_{11} = \{(r_{1t} - \bar{r}_1)^2 + (r_{1, \ t+1} - \bar{r}_1)^2 + (r_{1, \ t+2} - \bar{r}_1)^2\}/2$$

$$\hat{\sigma}_{12} = \{(r_{1t} - \bar{r}_1) (r_{2t} - \bar{r}_2) + (r_{1, \ t+1} - \bar{r}_1) (r_{2, \ t+1} - \bar{r}_2) + (r_{1, \ t+2} - \bar{r}_1) (r_{2, \ t+2} - \bar{r}_2)\}/2$$

.

$x_1$  représente la pondération du marché de la société 1 telle qu'elle était au début de la période d'analyse,

$x_2$  représente la pondération du marché de la société 2 telle qu'elle était au début de la période d'analyse,

.



Dans cette formulation du modèle,

$$(\hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{12} \dots \dots \dots \hat{\sigma}_{1, 144}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{144} \end{bmatrix}$$

est une estimation de  $\hat{\beta}_1 \sigma_m^2$ ,

$$(\hat{\sigma}_{21} \hat{\sigma}_{22} \hat{\sigma}_{23} \dots \dots \dots \hat{\sigma}_{2, 144}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{144} \end{bmatrix}$$

est une estimation de  $\hat{\beta}_2 \sigma_m^2$ ,  
etc.

#### 4. LES DONNÉES

Nous utilisons les données hebdomadaires pour la période incluse entre le 3 janvier 1969 et le 7 juillet 1978 pour les 144 sociétés<sup>6</sup> mentionnées dans le tableau 2. Nous avons donc 29 régressions de la forme (3), chacune d'elle basée sur une période de temps distincte et toujours plus longue. La dernière régression, par exemple, inclut les données de 31 semaines (du 8 décembre 1977 au 7 juillet 1978), tandis que la première inclut les données telles que nous les avons décrites plus haut, sur 4 semaines (du 3 janvier 1969 au 24 janvier 1969). Les 29 sous-échantillons de séries chronologiques sont indiquées dans le tableau 1, avec les dates correspondantes.

Les pondérations  $x_m$  sont calculées d'après les données initiales de la période d'analyse et sont définies comme la valeur de marché des actions de la société divisée par la valeur totale de marché des actions des 144 sociétés.

Le cours de chaque société correspond à la première cote du dernier jour ouvrable d'une semaine donnée.

Le taux de rendement<sup>7</sup> est défini comme suit :

6. Parmi les 330 sociétés françaises sur la bande magnétique de la Compagnie des Agents de Change (CAC), nous avons sélectionné les 144 sociétés pour lesquelles nous disposions de données complètes et exactes pour la période allant de janvier 1969 à juillet 1978.

7. Dans la définition du taux de rendement, la question se pose à savoir si cette formulation ou la formulation logarithmique, c'est-à-dire :  $r_{jt} = \log(P_{jt} + D_{jt}) - \log P_{j,t-1}$  est la formulation correcte. Des différences apparaîtront dans la distribution des taux de rendement successifs selon la définition utilisée. Toutefois ces différences ne sont pas significatives, les taux de rendement entre les périodes successives n'excèdent pas 20%, ce qui est généralement le cas lorsque l'on se base sur des cours hebdomadaires (Moore, 1962).

$$r_{jt} = \frac{P_{jt} - P_{j,t-1} + D_{jt}(1 + .5)}{P_{j,t-1}}$$

où :

- $r_{jt}$  = le taux de rendement (avant impôts) du titre  $j$ , de la période  $t - 1$  à la période  $t$ ;
- $P_{jt}$  = la valeur de l'action à la fin de la période  $t$ ;
- $P_{j,t-1}$  = la valeur de l'action à la fin de la période  $t - 1$ ;
- $D_{jt}$  = les dividendes payés durant la période  $t$  — dont l'avoir fiscal — qui est une subvention gouvernementale égale à la moitié des dividendes versés aux actionnaires des sociétés redevables.

Tous les cours sont bien sûr ajustés pour les changements de capitalisation avant de calculer le taux de rendement. Pour une semaine spécifique  $t$  où le coefficient d'ajustement tel que calculé par la Compagnie des Agents de Change (CAC), est inférieur à 1.0, on multiplie le cours de la semaine  $(t - 1)$  par ce coefficient. Ce cours ajusté nous permet de comparer le changement de valeur de la semaine  $(t - 1)$  à la semaine  $t$ . Le changement de capitalisation le plus courant qui affecte la valeur de l'action est ce que l'on appelle « l'augmentation du capital par attribution d'actions gratuites », qui veut que l'on augmente le nombre de parts en prélevant des fonds de ses réserves et donc en accroissant la rubrique « capital » du bilan. Les parts sont réparties entre les actionnaires.

L'impôt sur la plus-value n'existait pas lors de la période étudiée. Il existe bien des impôts sur les dividendes, mais comme il est permis de déduire des impôts une bonne partie des dividendes (y compris l'avoir fiscal) on peut laisser de côté les impôts sans problème majeur pour notre analyse.

## 5. RÉSULTATS ET CONCLUSIONS

Les résultats obtenus pour les 29 séries chronologiques des trois échantillons à coupe transversale, soit des 144 sociétés, des 100 premières et des 100 dernières, indiquent clairement que la somme des carrés des résidus de la régression (3) diminue — mais pas de façon monotone — à mesure que le nombre de périodes temporelles augmente (voir graphique et tableau 3). Cependant, la question est de savoir si oui ou non la somme des carrés des résidus approche zéro à mesure que la taille de l'échantillon temporel augmente, comme ce devrait être le cas pour que le marché approximatif de notre échantillon préspecifié soit efficient. On a tenté de répondre à cette question en

comparant les résultats de trois régressions non linéaires distinctes pour chacun des trois groupes de sociétés (l'échantillon composé des 144 sociétés, l'échantillon composé des 100 premières sociétés, et celui composé des 100 dernières sociétés)<sup>8</sup>. Les trois fonctions non linéaires reliant la somme des carrés des résidus et la taille de l'échantillon temporel sont :

$$E_i = A T_i^{-\beta} \cdot e^{\epsilon_i} \text{ ou } \log E_i = \log A - \beta \log T_i + \epsilon_i \quad (4a)$$

$$E_i = \alpha + \frac{\beta}{T_i} + \epsilon_i \quad (4b)$$

$$E_i = \frac{\beta}{T_i} + \epsilon_i \quad (4c)$$

où :

$i = 1, 2, \dots, 29$

$E_i$  = la somme des carrés des résidus dérivée de l'équation (3) pour le  $i$ ème groupe temporel ;

$T_i$  = la taille de la série temporelle de l'échantillon du  $i$ ème groupe temporel,  $T_i = 3, 4, \dots, 31$

Si la somme des carrés des résidus approche zéro à mesure que la taille de l'échantillon temporel augmente, les équations (4a) ou (4c) devraient donner de meilleurs résultats que l'équation (4b) pour chacun des trois groupes de sociétés testés. Les résultats montrent clairement (tableau 4) que l'équation (4b) est supérieure (supérieur en termes de  $\bar{R}^2$  et de la statistique D.W.) aux équations (4a) ou (4c) pour les trois groupes de sociétés. En d'autres termes, les résultats indiquent que la somme des carrés des résidus n'approche pas zéro de façon asymptotique, mais approche plutôt 49 pour le groupe échantillon de 144 sociétés ; 32 pour le groupe échantillon des 100 premières sociétés, 34 pour le groupe échantillon des 100 dernières sociétés (tableau 4). Les résultats semblent donc indiquer que le marché approximatif est inefficent et jettent donc de sérieux doutes quant à la validité du MEDAF comme modèle pour décrire la relation rentabilité/risque des valeurs cotées à la Bourse de Paris.

Toutefois, étant donné les données utilisées dans cette étude, il conviendrait de faire les remarques suivantes pour édulcorer la conclusion ci-haut :

(1) L'analyse effectuée ici suppose que les rentabilités des valeurs des 144 sociétés proviennent de la même distribution conjointe de pro-

8. Les cent premières sociétés se composent des 144 sociétés sélectionnées à l'origine moins les sociétés métallurgiques, minières, de pétrole et de carburant, de produits chimiques, d'électro-métallurgie et de verreries, de services publics, de textiles et de transports. Les 100 dernières sociétés se composent des 144 sociétés sélectionnées au départ moins les sociétés financières.

babilité pour les 29 groupes de séries chronologiques. Il s'agit là d'une supposition audacieuse et l'un des signes indiquants qu'elle peut être invalide réside dans l'absence de monotonie dans la somme des carrés des résidus de la régression (3) à mesure que la taille de l'échantillon temporel augmente, comme le montre le graphique.

(2) La méthode utilisée dans cette étude est une méthode asymptotique. On doit évidemment se demander si les 31 observations temporelles (31 semaines), la taille de l'échantillon temporel la plus importante, se rapproche du concept asymptotique. Peut-être une taille temporelle beaucoup plus grande indiquerait-elle que la somme des carrés des résidus de la régression (3) approche zéro. Malheureusement, l'absence de données facilement accessibles, c'est-à-dire sur bandes magnétiques, nous empêchent d'étendre la taille de l'échantillon temporel au-delà de 31 semaines.

D'après le tableau 3, il apparaît que le coefficient de  $(\hat{V}X_m)$ ,  $\gamma_1$ , estimé à l'aide de l'équation (3), n'est pas statistiquement différent de zéro dans 33 à 50 pour cent des cas estimés. La même chose en ce qui concerne  $R^2$ . On ne devrait pas attacher trop d'importance à cette observation. En effet, il convient de rappeler à ce point que notre plus grand échantillon se limite à 144 sociétés ne représentant pas la totalité des sociétés cotées à la Bourse de Paris (la plus importante en France), qui comprend en fait quelque 900 sociétés, sans mentionner celles qui sont cotées en dehors. Si le nombre de sociétés comprises dans l'échantillon utilisé pour cette étude est seulement de 144 alors qu'il en existe environ 900 sur le marché, il est bien entendu que les termes  $\hat{\beta}_j \hat{\sigma}_m^2$  ou  $(\hat{V}X_m)^9$ , dérivés de l'équation (3) seront en général plus petits si les termes de covariance entre les sociétés sont (principalement) positifs. Ceci affectera bien sûr la taille du coefficient  $\hat{\gamma}_1$  et le  $\bar{R}^2$ .

Toutefois, il est important de remarquer que l'accroissement de la taille de l'échantillon de sociétés en coupe transversale (c'est-à-dire de 100 à 144 sociétés) ne produit pas nécessairement de résultats plus favorables quant à l'efficacité du marché approximatif — résultat qu'on aurait pu anticiper par les remarques émises plus tôt dans l'introduction.

Emmanuel APEL,  
*Université d'Ottawa*

9. Comme on l'a vu à la page 232, rappelons que chaque  $\hat{\beta}_j \hat{\sigma}_m^2$  est égal à  $\sigma_{j1}(x_1) + \sigma_{j2}(x_2) + \dots + \sigma_{jn}(x_n)$ .

**TABLEAU 1**  
 LES DATES DE CALENDRIER POUR LES VINGT-NEUF SÉRIES  
 CHRONOLOGIQUES NON CHEVAUCHÉES

Taille de l'échantillon temporel	Période chronologique (données hebdomadaires)	
	Début de la période	Fin de la période
3	03 janvier 1969	24 janvier 1969
4	24 janvier 1969	21 février 1969
5	21 février 1969	28 mars 1969
6	28 mars 1969	09 mai 1969
7	09 mai 1969	27 juin 1969
8	27 juin 1969	22 août 1969
9	22 août 1969	24 octobre 1969
10	24 octobre 1969	02 janvier 1970
11	02 janvier 1970	20 mars 1970
12	20 mars 1970	12 juin 1970
13	12 juin 1970	11 septembre 1970
14	11 septembre 1970	18 décembre 1970
15	18 décembre 1970	02 avril 1971
16	02 avril 1971	23 juillet 1971
17	23 juillet 1971	19 novembre 1971
18	19 novembre 1971	24 mars 1972
19	24 mars 1972	04 août 1972
20	04 août 1972	22 décembre 1972
21	22 décembre 1972	18 mai 1973
22	18 mai 1973	19 octobre 1973
23	19 octobre 1973	27 mars 1974
24	27 mars 1974	11 octobre 1974
25	11 octobre 1974	04 avril 1975
26	04 avril 1975	03 octobre 1975
27	03 octobre 1975	09 avril 1976
28	09 avril 1976	22 octobre 1976
29	22 octobre 1976	13 mai 1977
30	13 mai 1977	08 décembre 1977
31	08 décembre 1977	07 juillet 1978

**TABLEAU 2**  
 LISTE DES CENT QUARANTE-QUATRE SOCIÉTÉS  
 FRANÇAISES COMPOSANT L'ÉCHANTILLON

(Le lecteur pourra se procurer ce tableau en s'adressant à l'auteur)

TABLEAU 3

ESTIMATION DE L'ÉQUATION (3) DANS LE TEXTE POUR LES DIFFÉRENTES TAILLES DE L'ÉCHANTILLON TEMPOREL POUR (a) LES 144 SOCIÉTÉS, (b) LES 100 PREMIÈRES SOCIÉTÉS, ET (c) LES 100 DERNIÈRES SOCIÉTÉS

Taille de l'échantillon temporel*		$\hat{R} = \gamma_0 + \gamma_1(\hat{V}X_m)^{**}$		Somme des carrés des résidus	$\bar{R}^2$	D.W.
3	(a)	1.64 (9.4)	-.0247 (0.7)	525.38	0	2.03
	(b)	1.48 (7.0)	-.0215 (0.3)	370.84	0	2.03
	(c)	1.77 (8.17)	-.0429 (1.6)	409.42	0	1.94
4	(a)	2.85 (14.8)	-.1382 (2.5)	618.44	.04	1.46
	(b)	(2.57) (11.2)	-.0992 (1.2)	380.69	.01	1.63
	(c)	3.02 (12.8)	-.1080 (2.3)	474.22	.04	1.49
5	(a)	1.20 (6.7)	.0529 (1.4)	282.16	.01	1.98
	(b)	1.17 (5.3)	.0682 (1.2)	201.00	.01	2.02
	(c)	1.27 (6.1)	.0044 (0.1)	196.69	0	1.98
6	(a)	0.35 (1.5)	.0230 (1.7)	224.49	.01	1.84
	(b)	0.58 (2.1)	.0078 (0.5)	148.74	0	1.74
	(c)	0.11 (0.4)	.0303 (2.2)	168.27	.04	1.93
7	(a)	-0.98 (6.5)	-.0480 (1.4)	132.68	.01	2.01
	(b)	-0.92 (5.1)	-.0814 (1.8)	102.82	.02	1.93
	(c)	-1.06 (5.9)	-.0253 (0.8)	84.70	0	2.14
8	(a)	0.22 (1.6)	.1269 (4.0)	123.71	.10	1.84
	(b)	0.18 (1.2)	.1221 (2.7)	82.22	.06	1.79
	(c)	-0.11 (0.6)	.0818 (3.08)	93.91	.08	1.84
9	(a)	0.40 (3.6)	.0380 (0.7)	122.57	0	1.95
	(b)	0.30 (2.1)	.0666 (1.1)	85.14	0	1.93

Taille de l'échantillon temporel*		$\hat{R} = \gamma_0 + \gamma_1(\hat{V}X_m)^{**}$		Somme des carrés des résidus	$\bar{R}^2$	D.W.
	(c)	0.48 (3.2)	.0334 (0.6)	105.54	0	2.01
	(a)	0.56 (4.5)	-.0632 (1.2)	171.88	0	1.87
10	(b)	0.33 (2.5)	.0398 (0.6)	87.48	0	1.74
	(c)	0.48 (3.2)	-.0180 (0.4)	115.14	0	1.81
	(a)	-0.36 (3.9)	.3120 (5.9)	103.27	.20	2.01
11	(b)	-0.30 (2.6)	.3043 (4.9)	76.31	.20	1.97
	(c)	0.33 (2.5)	.2240 (5.2)	65.74	.20	1.82
	(a)	-0.91 (9.9)	.1062 (5.2)	93.29	.15	1.93
12	(b)	-0.83 (9.0)	.0953 (6.6)	64.00	.30	1.85
	(c)	-0.53 (4.4)	-.0507 (1.9)	44.28	.02	1.92
	(a)	0.23 (3.1)	.0539 (1.5)	32.60	.01	2.08
13	(b)	0.26 (3.2)	.0258 (0.7)	20.98	0	1.83
	(c)	-0.08 (1.1)	.0736 (2.25)	25.67	.04	1.98
	(a)	-0.01 (0.2)	.0824 (1.0)	74.92	0	1.83
14	(b)	0.11 (1.3)	-.1276 (1.3)	39.45	.01	1.95
	(c)	-0.11 (1.0)	.0830 (0.9)	65.78	0	1.67
	(a)	0.29 (3.7)	-.0360 (0.5)	70.47	0	1.83
15	(b)	0.40 (4.4)	-.0702 (0.9)	45.24	0	1.83
	(c)	0.19 (2.0)	.0499 (0.7)	67.30	0	1.85
	(a)	0.10 (1.2)	.2643 (3.3)	85.33	.07	1.89
16	(b)	0.19 (2.0)	.2265 (2.1)	51.55	.03	2.34

Taille de l'échantillon temporel*		$\hat{R} = \gamma_0 + \gamma_1(\hat{V}X_m)^{**}$	Somme des carrés des résidus	$\bar{R}^2$	D.W.	
	(c)	0.01 (0.1)	.0418 (0.5)	68.41	0	1.62
	(a)	-0.22 (1.9)	-.0953 (4.5)	69.55	.12	1.67
17	(b)	-0.27 (2.0)	-.0740 (2.6)	50.62	.06	1.64
	(c)	-0.37 (2.8)	-.0750 (3.9)	39.07	.12	1.63
	(a)	0.98 (7.8)	.0107 (0.5)	109.10	0	1.65
18	(b)	1.03 (6.6)	.0170 (0.5)	82.76	0	1.49
	(c)	0.82 (6.1)	.0241 (1.1)	60.18	0	1.50
	(a)	0.72 (4.7)	.0669 (2.4)	108.51	0	1.61
19	(b)	0.74 (3.6)	.0825 (2.3)	83.82	.04	1.73
	(c)	0.43 (2.4)	.0846 (3.0)	76.70	.07	1.48
	(a)	-0.42 (4.4)	.0296 (1.1)	59.31	0	1.44
20	(b)	-0.31 (3.3)	-.0312 (0.8)	34.19	0	1.66
	(c)	-0.56 (4.4)	.0577 (2.2)	43.60	.03	1.50
	(a)	0.69 (5.2)	.0724 (2.7)	121.65	.04	1.57
21	(b)	0.40 (2.5)	.1473 (4.1)	88.83	.14	1.55
	(c)	0.85 (4.7)	.0348 (1.2)	90.16	0	1.68
	(a)	-0.21 (2.7)	-.0428 (1.5)	49.32	.01	1.67
22	(b)	-0.31 (3.3)	-.0312 (0.8)	34.19	0	1.66
	(c)	0.49 (5.0)	-.0150 (0.6)	33.38	.01	1.73
	(a)	-0.51 (3.4)	.0113 (0.7)	85.93	0	1.53
23	(b)	-0.60 (3.6)	.0121 (0.7)	52.68	0	1.87



Taille de l'échantillon temporel*		$\hat{R} = \gamma_0 + \gamma_1(\hat{V}X_m)^{**}$		Somme des carrés des résidus	$\bar{R}^2$	D.W.
24	(c)	-0.60 (3.0)	.0089 (0.6)	68.97	0	1.39
	(a)	-0.55 (3.5)	0.0562 (4.7)	92.04	.13	1.42
	(b)	-0.76 (4.1)	-.0469 (3.9)	60.71	.12	1.51
	(c)	-0.90 (4.8)	-.0351 (2.5)	68.21	.05	1.26
	(a)	0.70 (6.0)	.0764 (4.7)	86.11	.13	1.80
	(b)	0.80 (4.9)	.0720 (3.4)	68.13	.10	1.73
25	(c)	0.61 (4.4)	.0767 (4.7)	65.18	.17	1.96
	(a)	-0.23 (2.1)	.0954 (4.9)	66.23	.14	1.78
	(b)	-0.15 (1.1)	.0987 (4.3)	47.80	.15	1.72
	(c)	-0.60 (4.0)	.1009 (4.9)	59.27	.18	1.75
	(a)	0.29 (2.8)	-.0205 (0.7)	59.17	0	1.82
	(b)	0.28 (2.1)	-.0215 (0.5)	47.29	0	1.81
26	(c)	0.22 (1.7)	.0120 (0.4)	44.84	0	1.80
	(a)	-0.45 (4.7)	-.0841 (2.4)	44.35	.03	1.61
	(b)	-0.42 (4.2)	-.0626 (1.5)	23.17	.01	1.78
	(c)	-0.77 (6.1)	-.0448 (1.5)	33.96	.01	1.53
	(a)	-0.39 (3.6)	-.0361 (2.0)	57.43	.02	1.69
	(b)	-0.30 (2.5)	-.0577 (2.4)	32.64	.05	1.84
27	(c)	-0.53 (3.7)	-.0180 (1.0)	43.25	0	1.72
	(a)	0.38 (3.4)	.0534 (2.9)	77.01	.05	1.99
	(b)	0.19 (1.7)	.0949 (4.3)	34.85	.15	2.29

Taille de l'échantillon temporel*	$\hat{R} = \gamma_0 + \gamma_1(\hat{V}X_m)^{**}$	Somme des carrés des résidus	$\bar{R}^2$	D.W.		
31	(c)	0.09 (0.5)	.0530 (2.6)	69.01	.05	1.71
	(a)	0.70 (5.2)	.0288 (4.2)	75.98	.11	1.86
	(b)	0.82 (4.9)	.0281 (3.0)	54.52	.07	1.96
	(c)	0.55 (2.9)	.0270 (3.3)	68.71	.09	1.96

NOTES :

\* Les dates de calendrier correspondant à chaque taille de l'échantillon temporel sont indiquées dans le tableau 1 ; (a) désigne l'échantillon de 144 sociétés ; (b) les 100 premières sociétés de l'échantillon ; (c) les 100 dernières sociétés de l'échantillon.

\*\* Les variables sont définies dans le texte, p. 229.

Les chiffres entre parenthèses représentent la statistique - t.

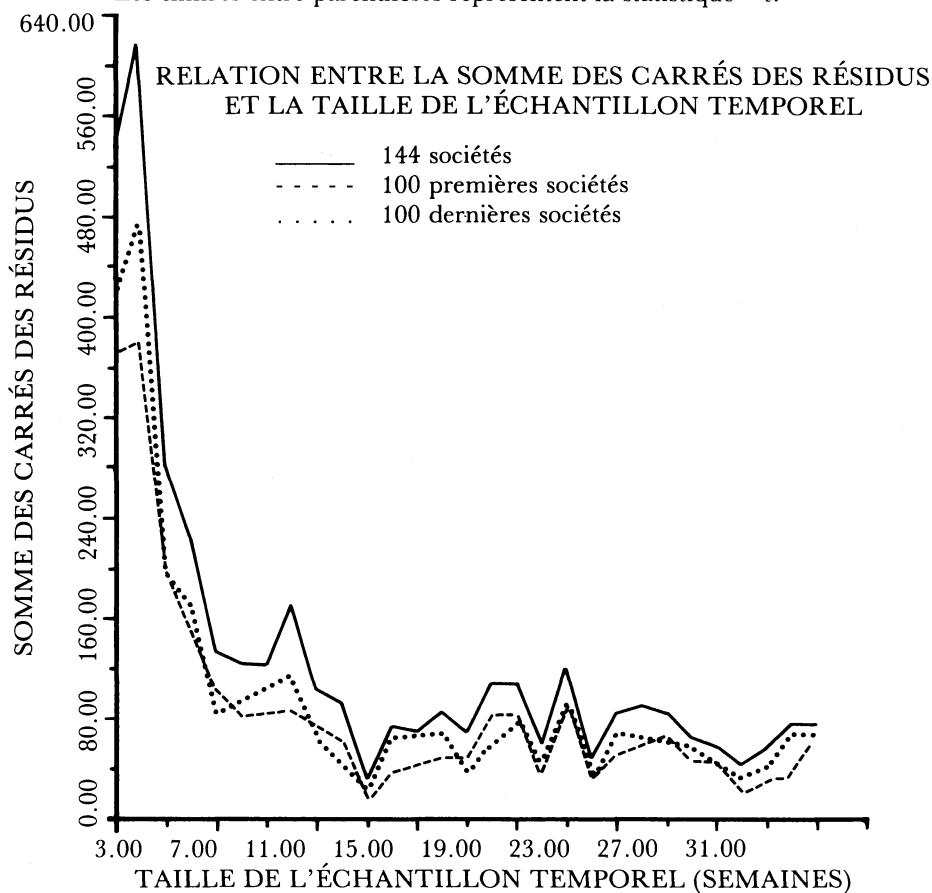


TABLEAU 4

RÉGRESSION NON LINÉAIRE DE LA RELATION ENTRE LA SOMME DES CARRÉS DES  
RÉSIDUS ( $E_i$ ) ET LA TAILLE DE L'ÉCHANTILLON TEMPOREL ( $T_i$ ) POUR (A) LES 144 SOCIÉTÉS,  
(B) LES 100 PREMIÈRES SOCIÉTÉS, (C) LES 100 DERNIÈRES SOCIÉTÉS

(a)	$\log E_i = \log A - \beta \log T_i + \epsilon_i$	$\bar{R}^2$	D.W.
(A)	6.2405 (30.1)	-.6633 (8.3)	.708 1.61
(B)	5.8712 (25.9)	-.6815 (7.8)	.683 1.42
(C)	5.8811 (25.6)	-.6396 (7.2)	.647 1.44
(b)	$E_i = \alpha + \beta \frac{1}{T_i} + \epsilon_i$		
(A)	49.26 (3.4)	604.36 (9.9)	.777 2.29
(B)	31.96 (3.9)	411.32 (11.7)	.829 2.04
(C)	34.73 (3.2)	465.19 (9.9)	.779 2.35
(c)	$E_i = \beta \frac{1}{T_i} + \epsilon_i$		
(A)		725.49 (12.4)	.754 2.34
(B)		489.92 (13.9)	.804 2.08
(C)		550.59 (12.6)	.759 2.41

## RÉFÉRENCES

- BLACK, Fischer, «Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing», *Journal of Business*, 45 (juillet 1972), pp. 444-455.
- BLACK, Fisher, JENSEN, Michael C. ; SCHOLES, Myron, «The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests», *Studies in the Theory of Capital Markets*, pp. 79-121. Edited by Michael C. Jensen. New York: Praeger Publishers, 1972.
- BLUME, Marshall, «On the Assessment of Risk», *Journal of Finance*, 26 (mars 1971), pp. 1-10.
- FAMA, Eugene F., «Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work», *Journal of Finance*, 25 (mai 1970), pp. 383-417.
- FAMA, Eugene F. ; FISHER, Lawrence ; JENSEN, Michael ; ROLL, Richard, «The Adjustment of Stock Prices to New Information», *International Economic Review*, 10 (février 1969), pp. 1-21.
- FAMA, Eugene F. ; MACBETH, James D, «Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests», *Journal of Political Economy*, 71 (mai-juin 1973), pp. 607-636.
- HAMON, Jacques, «L'Efficiencce du marché boursier français: étude empirique 1957-1971», thèse de doctorat inédite, Université de Rennes, 1978.
- MERTON, R.C., «An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7(septembre 1972), pp. 1851-1872.
- MILLER, Merton H. ; SCHOLES, Myron, «Rates of Return in Relation to Risk: A Re-examination of Some Recent Findings», *Studies in the Theory of Capital Markets*, pp. 47-78. Edited by Michael C. Jensen. New York: Praeger Publishers, 1972.
- MOORE, Arnold, «A Statistical Analysis of Common Stock Prices», Unpublished Ph. D. thesis, Graduate School of Business, University of Chicago, 1962.
- ROLL, Richard, «A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests», Cahier de Recherche no. 45/1976. CESA: Jouy-en-Josas, France. A shortened version of this paper is entitled «Testing a Portfolio for Ex Ante Variance Efficiency» published in *Portfolio Theory, 25 years After* edited by E.J. Elton and M.J. Gruber. Amsterdam: North-Holland, 1979, pp. 135-149.
- ROLL, Richard, «A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests, Part I: On Past and Potential Testability of the Theory», *Journal of Financial Economics*, 15 (mars 1977), pp. 129-176.